CHUYÊN ĐỀ 5: CHỨNG MINH GÓC BẰNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh hai góc bằng nhau:

Phương pháp 1: Hai góc có cùng một số đo thì bằng nhau.

Phương pháp 2: Hai góc của hai tam giác bằng nhau hoặc hai tam giác đồng dạng, hai góc của tam

giác cân, đều; hai góc của cùng một đáy trong hình thang cân, hai góc đối của hình bình hành, … thì bằng nhau.

Phương pháp 3: Hai góc cùng bằng một góc thứ 3.

Phương pháp 4: Tia phân giác chia một góc thành hai phần bằng nhau.

Phương pháp 5: Các góc so le trong, đồng vị, đối đỉnh, ...

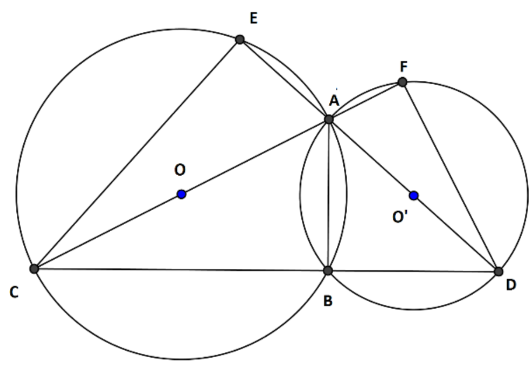
Phương pháp 6: Các góc nội tiếp cùng chắn một cung trong một đường tròn thì bằng nhau.

Phương pháp 7: Tứ giác nội tiếp có góc ngoài bằng góc đối trong.

Phương pháp 8: Sử dụng hàm số lượng giác: sin, cos, tan và cot.

Bài tập 1: Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại A và B. Vẽ đường kính AC và AD của (O) và (O’). Tia CA cắt đường tròn (O’) tại F, tia DA cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh: $AFC = EDC$

Chứng minh



Ta có:

$CED = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$CFD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))

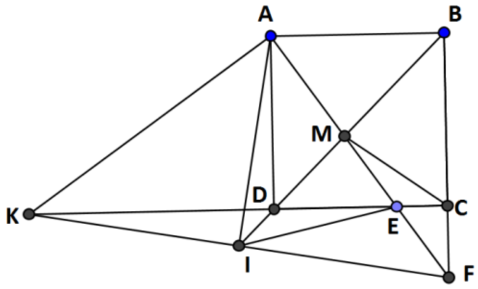
Suy ra $CED = CFD\,(90^0)$

Hai đỉnh E, F cùng nhịn cạnh CD một góc bằng 90^0.

Suy ra tứ giác CEFD nội tiếp.

$EFC = EDC$ (cùng chắn EC).

Bài tập 2: Cho hình vuông ABCD cố định. E là điểm di động trên cạnh CD (khác C và D). Tia AE cắt đường thẳng BC tại F. Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng DC tại K. BD cắt KF tại I.



a) Chứng minh: $CAF = CKF$

b) Chứng minh: $IDF = IEF$

c) Chứng minh: tam giác KAF vuông cân.

a) Ta có: $KAF = 90^0 (AK \perp AF)$ và $KCF = 90^0$ (ABCD là hình vuông)

Suy ra: $KAF = KCF (= 90^0)$

Hai đỉnh A, C cùng nhìn đoạn KF một góc bằng 90^0.

Suy ra: Tứ giác ACFK nội tiếp.

Suy ra $CAF = CKF$

b) Tứ giác ACKF nội tiếp nên ta có:

$AFK = ACK$ mà $AFK = 45^0, BDC = 45^0$ (là hình vuông)

Suy ra: $AFK = BDC (45^0)$

Do đó: Tứ giác IDEF nội tiếp (Vì góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

Suy ra $IDF = IEF$

c) Tam giác AKF vuông tại A (giả thiết), ta có:

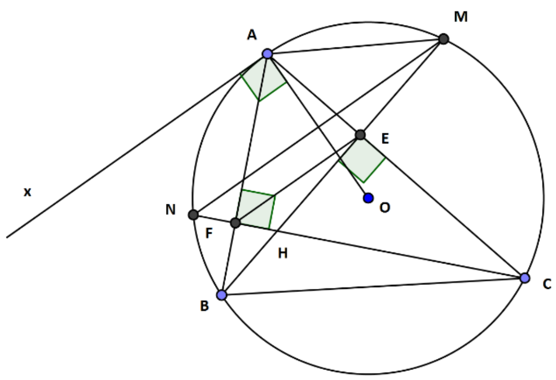
$AFK = 45^0$ suy ra $AKF = 45^0$ suy ra tam giác KAF vuông cân tại A.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp nội tiếp được đường tròn.

b) Hai tia BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Ax là tiếp tuyến tại A. Chứng minh $xAN = ANM$

c) Chứng minh: $MNC = EFC$.



Chứng minh

a) Tứ giác BFEC có:

$BFC = 90^0$ (CF là đường cao)

$BEC = 90^0$ (BE là đường cao)

Hai đỉnh F, E cùng nhìn cạnh BC một góc bằng 90^0.

Suy ra tứ giác BFEC nội tiếp.

b) Vì Ax là tia tiếp tuyến của (O).

Suy ra: AO $\perp$ Ax.

Và $xAN = ACN$ (1) (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Ta có: $ANM = ABM$ (cùng chắn AM)

Và $ABM = ACN$ (cùng chắn EF)

Suy ra $ANM = ACN$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $xAN = ANM$. (điều phải chứng minh)

c) Ta có: $MNC = MBC$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Và $EFC = MBC$ (tứ giác BFEC nội tiếp)

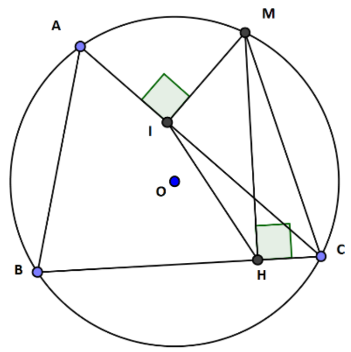
Suy ra: $MNC = EFC$. (điều phải chứng minh).

Bài tập 4: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thuộc cung nhỏ AC. Vẽ MH $\perp$ BC tại H, MI $\perp$ AC tại I.

Chứng minh: $IHM = ICM$

Chứng minh

Xét tứ giác MIHC, có:



$MIC = 90^0 (MI \perp AC)$

$MHC = 90^0 (MH \perp BC)$

Hai đỉnh I, H cùng nhìn đoạn MC một góc bằng 90^0.

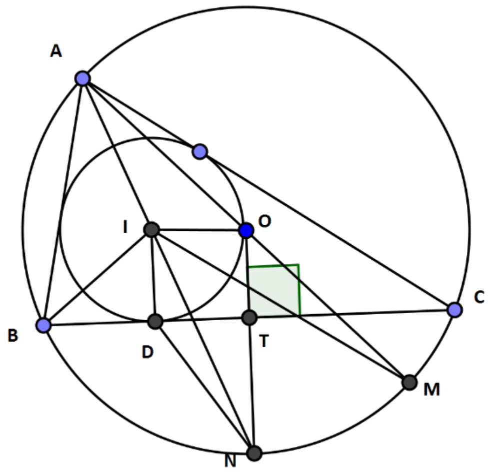
Suy ra tứ giác MIHC nội tiếp.

Suy ra $IHM = ICM$ (cùng chắn MI)

Bài tập 5: (Đề thi HSG 12 tỉnh Đồng Nai 2013 - 2014)

Th. S: Phạm Ngọc Tưởng
Facebook: www.facebook.com/2222hn

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có AB < BC < AC và ABC là góc nhọn. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác và tiếp xúc với BC tại D. M, N lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng AO, AI với (O). Biết A không trùng với M và N. Chứng minh: $IND = IMO$.



Chứng minh

Gọi T là giao của ON và BC.

Dễ chứng minh được:

$$IN = BN = \frac{BT}{\cos NBC} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{A}{2}}$$

$$\text{Suy ra } \frac{IN}{AM} = \frac{a}{2.2R.\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{2.\cos\frac{A}{2}.\frac{a}{\sin A}} = \frac{\sin A}{2.\cos\frac{A}{2}} = \sin\frac{A}{2} = \frac{ID}{IA}$$

Mặt khác, ta có: $DIN = IAM (= IMO)$

Suy ra: $\Delta DIN \sim \Delta IAM$

Suy ra $IND \sim IMO$. (điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC, trên cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho BD = CE. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và DE. Đường thẳng qua M và N lần lượt cắt AB và AC tại P và Q. Chứng minh rằng: $MPB = MQC$.

Bài tập 2: Cho D là trung điểm của đoạn thẳng AM. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AM ta vẽ nửa đường tròn đường kính AM và nửa đường tròn đường kính AD. Tiếp tuyến tại D của đường tròn nhỏ cắt nửa đường tròn lớn tại C và các tiếp tuyến tại C và A của đường tròn lớn cắt nhau tại B. Nối P bất kì trên cung nhỏ AC với điểm D cắt nửa đường tròn nhỏ tại K. Chứng minh rằng: AP là phân giác của BAK..

Bài tập 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a. E là điểm nằm giữa A và B, đường thẳng CE cắt dường thẳng AD tại K. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với CE, cắt AB tại I.

a) Chứng minh rằng: Trung điểm của IK di động trên một đường thẳng cố định khi E di động trên đoạn AB.

b) Cho BE = x. Tính BK, CK, IK và diện tích tứ giác ACKI theo a và x.

Bài tập 4: Cho tam giác ABC với $A < 90^0$, có AB < AC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Vẽ đường cao AH và bán kính OA. Chứng minh rằng

$$OAH = B - C.$$

Bài tập 5: Cho hai đường tròn (O1) và (O2) cắt nhau ở A và B (O1 và O2 thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Qua A kẻ cát tuyến cắt đường tròn ở (O1) ở C, cắt đường tròn (O2) ở D. Các tiếp tuyến của hai đường tròn kẻ từ C và D cắt nhau ở I. Chứng minh rằng khi cát tuyến CAD thay đổi thì:

a) CBD không đổi

b) CID không đổi

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD, P ở trong hình bình hành sao cho $PAB = PCB$. Chứng minh rằng: $PBA = PDA$.

Bài tập 7: Cho hình bình hành ABCD, trên BC và CD lấy 2 điểm tương ứng là M và N sao cho BN=DM. Gọi I là giao điểm của BN và DM. Chứng minh: $AID = AIB$.

Bài tập 8: Cho (O_1) và (O_2) tiếp xúc trong với nhau tại A. Điểm C thuộc (O_1). Kẻ tiếp tuyến của (O_1) tại C cắt (O_2) tại B và D. Chứng minh: $BAC = CAD$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD và điểm P nằm ngoài hình bình đó sao cho $PAB = PCB$ đồng thời A và C khác phía với đường thẳng PB. Qua A vẽ đường thẳng Ax //DP, qua P vẽ đường thẳng Py // AD hai đường thẳng này cắt nhau ở Q.

a) chứng minh tứ giác ABPQ nội tiếp.

b) Chứng minh: $APB = DPC$.

Bài tập 10: (NK 2006 – 2007 CD) cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H. Các đường thẳng BH và CH lần lượt cắt AC, AB tại M, N. Biết: $NHM = 120^0$

a) Chứng minh: $AMN = ABC$. Tính: $\frac{MN}{BC}$.

b) Tính: $\frac{AH}{BC}$.